View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by Kyoto University Research Information Repository

KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

KYOTO UNIVERSITY

Title	$G_2(q)$のSchurの指数について (有限群論)
Author(s)	大森, 常住
Citation	数理解析研究所講究録 (1979), 344: 80-88
Issue Date	1979-02
URL	http://hdl.handle.net/2433/104312
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Kyoto University

数理解析研究所講究録
344巻 1979年 80-88

$G_2(q)$のSchurの指数について

東京都立大学　理学部　大森常佳

1. 序

$G=G_2(q)$を標数 p の有限体 $\mathbb{F}_q$ ($q=p^f$)上の(G_2)型のChevalley群とする. G の指標表は $p\neq 2,3$ の場合はB. ChangとR. Ree[4]によって, $p=2,3$ の場合は榎本氏によって[5], [6]それぞれ与えられた. この講演では次の定理を証明する.

定理1. $p>2$とする. このとき, G のすべての既約指標の有理数体 $\mathbb{Q}$ 上のSchur の指数は 1 に等しい.

$p=2$ の場合はまだcheckしていない3個の指標を除いて, 他の指標のSchurの指数はすべて 1 である.

以後, 有限群の既約指標 φ に対し, $m_F(\varphi)$ によって φ の (標数0の体) F上のSchurの指数を, $F(\varphi)$ によって,

φ の値を添加して得られる F の拡大体を表わす．$\mathbb{Z}$ と $\mathbb{R}$ はそれぞれ有理整数環と実数体とを表わす．

2．準備

この節では H によってひとつの有限群を表わす．

補題1．φ を H の既約指標，ξ を $\mathbb{Q}$ で実現されるような H の指標とする．このとき

$$m_{\mathbb{Q}}(\varphi) \mid \langle \varphi, \xi \rangle_H ,$$

ただし H 上の二つの類関数 α と β に対し

$$\langle \alpha, \beta \rangle_H \underset{(\mathrm{def.})}{=\!=} \frac{1}{|H|} \sum_{g \in H} \alpha(g) \overline{\beta(g)}$$

（$\overline{}$ は複素共役）．

証明は例えば [7, Chap. II, (11.4), p. 62] を見よ．

以後、補題1の ξ のように、有理数体で実現される指標を単に H の有理指標と呼ぶ．

補題2．x を位数 n の H の元とする．H の元 y で位数が $\varphi(n)$（φ はEulerの関数），そして y によっ

て生成される巡回群 $\langle y \rangle$ が $\langle x \rangle$ に共役によって忠実に作用するものが存在するものとする．このとき，H の任意の指標 χ は x において $\mathbb{Z}$ に値を取り，χ が既約ならば $m_{\mathbb{Q}}(\chi)$ は $\chi(x)$ を割り切る．

$\langle y \rangle$ は $\langle x \rangle$ に忠実に作用しているので，x の位数 n と素であるような各整数 i に対して x^i と x とは $K=\langle y \rangle \cdot \langle x \rangle$（半直積）において互に共役である．したがって指標の性質により $\chi(x) \in \mathbb{Z}$．さて

$$(2.1) \qquad \chi | \langle x \rangle = \sum_{\lambda} a_{\lambda} \cdot \lambda$$

と置く．ただし右辺の和は $\langle x \rangle$ のすべての線型指標 λ にわたって取り，a_{λ} は負ではない整数である．容易にわかるように，各 λ に対し $\lambda^* = \mathrm{Ind}_{\langle x \rangle}^{K}(\lambda)$ は K の既約指標であり，$\lambda^* | \langle y \rangle$ は $\langle y \rangle$ の正則表現の指標と一致する．補題1により $m_{\mathbb{Q}}(\lambda^*)=1$ であり $\lambda^* \subset \mathbb{Z}$ だから λ^*，したがって $\mathrm{Ind}_{\langle x \rangle}^{H}(\lambda) = \mathrm{Ind}_{K}^{H}(\lambda^*)$ は有理指標である．再び補題1により，$m_{\mathbb{Q}}(\chi)$ は $a_{\lambda} = \langle \chi | \langle x \rangle, \lambda \rangle = \langle \chi, \mathrm{Ind}_{\langle x \rangle}^{H}(\lambda) \rangle$ を割り切る．(2.1) より次の式が得られる．

$$\chi(x)/m_{\mathbb{Q}}(\chi) = \sum_{\lambda} \left(a_{\lambda}/m_{\mathbb{Q}}(\chi)\right) \cdot \lambda(x).$$

この式で、右辺は代数的整数であり、左辺は有理数，したがって $m_{\mathbb{Q}}(\chi)$ は $\chi(x)$ を割り切る．（証終）．

補題3．（M. Benard－M. Schacher [1, Theorem 1′]）．
$\mathbb{Q}(\chi)$ は 1 の原始 $m_{\mathbb{Q}}(\chi)$ 乗根を含む．特に $\chi \subset \mathbb{R}$ ならば $m_{\mathbb{Q}}(\chi) \leqq 2$（Brauer－Speiser の定理）．

補題4． K を H の部分群， F を標数 0 の体， E を F の有限次拡大体とする． χ と ξ をそれぞれ E に値を取るような H と K の既約指標とする．このとき

$$m_F(\chi) \mid \langle \chi, \mathrm{Ind}_K^H(\xi) \rangle_H \cdot [E : F(\chi)] \cdot m_E(\xi).$$

証明は [7, §11] を見よ．

3．定理1の証明

この節では $p>2$ とする．

補題5． u を $p>3$ のときは G の任意のべき単元（p-元），$p=3$ のときは正則でないような G の任意のべき単元とする． χ を G の任意の既約指標とする．このとき

$$\chi(u) \in \mathbb{Z} \quad \underline{かつ} \quad m_{\mathbb{Q}}(\chi) \mid \chi(u) .$$

k を $\mathbb{F}_q$ の代数的閉包，$\overline{G}$ を k 上の (G_2) 型の Chevalley群とする．$\overline{G}$ は中心が自明であるような半単純な連結線型代数群であり、$G = G_2(q)$ は $\overline{G}$ の $\mathbb{F}_q$-有理点のなす群と一致する．$\overline{G}$ のべき単元 u が正則であるためには（［3］の記号に従えば）$\overline{G}$ において u が $x_a(1) \times x_b(1)$ に共役であることが条件である．$p>3$ とする．p は $\overline{G}$ に関して良い素数で $\overline{G}$ の中心は連結だからこの場合定理は［8］に含まれる．$p=3$ あるいは >3 で，u が正則でないときは容易にわかるように u の位数は p であり，$\langle u \rangle$ に忠実に作用するような位数 $\varphi(p)=p-1$ である元 t が存在する．例えば $p>3$ で $u = x_b(1)x_{3a+b}(\mu)$（記号は［3, p. 199］）とすると

$$u^i = x_b(i)x_{3a+b}(i\mu)x_{3a+2b}\left(-\frac{i(i-1)}{2}\mu\right), \quad 1 \le i \le p-1,$$
$$u^p = 1 .$$

そこで

$$t = h(\nu^{-1}, 1, \nu)x_b\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \quad , \quad \langle \nu \rangle = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$$

と置けば

$$t^i = h(\nu^{-i}, 1, \nu^i)\, x_a\!\left(-\frac{\nu^i - 1}{2}\right), \quad 1 \leq i \leq p-2,$$
$$t^{p-1} = 1$$

かつ

$$t^{-1} u\, t = x_a(\nu)\, x_{3a+a}(\nu\mu)\, x_{3a+2a}\!\left(-\frac{\nu(\nu-1)}{2}\mu\right)$$
$$= u^{\nu}.$$

他の元についても同様である．(証終)．

さて χ を G の既約指標とする．χ に対し $\mathbb{Z}$ の ideal $\mathfrak{a}(\chi)$ を次のように構成する．すなわち，$p>3$ のときは，$\mathfrak{a}(\chi)$ は $\{\chi(u)\,;\ u$ は G のべき単元$\}$ によって生成された ideal，$p=3$ のときは，$\mathfrak{a}(\chi)$ は $\{\chi(u) \mid u$ は正則ではない G のべき単元$\}$ によって生成された ideal．補題5により，$\mathfrak{a}(\chi)$ は確かに $\mathbb{Z}$ の ideal である．$c_\chi > 0$ を $\mathfrak{a}(\chi)$ の生成元とする．補題5により $m_{\mathbb{Q}}(\chi)$ は c_χ を割り切る．

<u>補題</u> 6 ([4], [5])．c_χ <u>は</u> $\chi(e)$ <u>の</u> p-<u>part に等しい</u>．<u>よって</u> $m_{\mathbb{Q}}(\chi)$ <u>は</u> p <u>のべきを割り切る</u>．

定理1を証明する．θと$\overline{\theta}$とを次数$q(q^2-1)/3$の二つの既約指標とする（$p>3$のときは[4, p. 412]の記号で$\theta=X_{19}$，$\overline{\theta}=\overline{X_{19}}$，$p=3$のときは[5, p. 242]の記号で$\theta=\theta_{12}(1)$，$\overline{\theta}=\theta_{12}(-1)$）．$\theta$と$\overline{\theta}$以外の$G$の指標はすべて$\mathbb{R}$に値を取るからBrauer－Speiserの定理（補題3）によって，それらの指数は高々2，よって補題6から主張が得られる．次にθと$\overline{\theta}$とは互いに複素共役で$\mathbb{Q}(\theta)=\mathbb{Q}(\overline{\theta})=\mathbb{Q}(\zeta_3)$（$\zeta_3$は1の原始3乗根）．補題3により$m_{\mathbb{Q}}(\theta)=m_{\mathbb{Q}}(\overline{\theta})$は6を割り切る．よって$p>3$のときは主張は正しい．$p=3$とする．[5, p. 197]で構成された指標$\theta_9(i)$，$i=\pm1$に対し

$$\langle \theta|B,\ \theta_9(1)\rangle_B=1,$$
$$\langle \overline{\theta}|B,\ \theta_9(-1)\rangle_B=1$$

がそれぞれ成立し$\mathbb{Q}(\theta_9(i))\subset\mathbb{Q}(\zeta_3)$であるから，補題4により（$m_{\mathbb{Q}(\zeta_3)}(\theta_9(i))=1$は容易にわかる），$m_{\mathbb{Q}}(\theta)=m_{\mathbb{Q}(\zeta_3)}(\theta)=1$，$m_{\mathbb{Q}}(\overline{\theta})=m_{\mathbb{Q}(\zeta_3)}(\overline{\theta})=1$．（証終）．

4. $p=2$の場合．

$p=2$とする．まず$G=G_2(2^f)$のGelfand－Graevの指標Γ_Gが有理指標であることを示す．Γ_Gは

multiplicity-freeだから，Γ_G の既約成分のSchurの指数はすべて 1 である．これにより［6］において，その次数を q の多項式とみなしたときに次数6次であるような指標の指数は 1 である． u を正則ではない G のべき単元（すなわち u の位数は 2 のべき）とし，χ を G の既約指標とすると $\chi(u) \in \mathbb{Z}$ であり，かつ $m_{\mathbb{Q}}(\chi) \mid \chi(u)$ である．また $c_\chi = \chi(e)_p$ を見ることも容易である．よって奇数次数の既約指標はすべて指数が 1 である．更に［2］により，1_B^G（Bは G のBorel部分群）にあらわれる指標はすべて有理指標である．実際［6］の記号に従えば

$$1_B^G = \theta_0 + 2\theta_1 + 2\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5,$$

ここで $\theta_0 = 1_G$，$\theta_5 = St_G$．$\theta_9^{(1)}$ と $\theta_9^{(2)}$ とは前節の $\theta, \bar{\theta}$ と同様に扱うことができる．以上によって，次の三つが残る：θ_1'，θ_2'，θ_8．なお，これら三つは $\mathbb{R}$ に値を取るので，指数は高々 2 である．

文　献

［1］M. Benard and M. Schacher, J. Alg. 22, 1972, p. 378–385.

[2] C. T. Benson and C. W. Curtis, Trans. A. M. S., 165, 1972, p. 251–273.

[3] B. Chang, J. Alg. 9, 1968, p. 190–211.

[4] B. Chang and R. Ree, Instituto Nationale dé Alta Mat., Symp. Mat. Vol. XIII, 1974, p. 395–413.

[5] H. Enomoto, Japan. J. Math. 2, 1976, p. 191–248.

[6] ________, The characters of Chevalley groups of type (G_2) over finite fields of characteristic 2, preprint.

[7] W. Feit, Characters of finite groups, Benjamin, 1967.

[8] Z. Ohmori, Quart. J. Math. Oxford (2), 28, 1977, p. 357–361.